

RJEŠENJE: 4.7. Zadatak 3.7)

I - Istarživanje funkcije: – Područje definicije: svaki $x \in \mathbb{R}$.

– Limesi na rubovima područja definicije

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0^+$$

- Funkcija je neparna $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x}{x^2 - 4}$ (simetrična u odnosu na ishodište) i nije periodična.

– Nultočke: razlomljena funkcija ima vrijednost nula u nulama brojnika, zato je

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ je jedina nultočka}$$

II - istraživanje funkcije $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1. \text{ S.T.}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
predznak f'		-	+	-		
tijek f-je f		\searrow	m	\nearrow	M	\searrow

$$m = f(-1) = -\frac{1}{2}, \text{ minimum } \left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

$$M = f(1) = \frac{1}{2}, \text{ maksimum } \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

III - istraživanje funkcije $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}, \quad 2x(x^2 - 3) = 0$$

$$\text{moguće točke pregiba} : x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
predznak f''		-	+	-	+
konveksnost f		\frown $p_1 = -0.43$	\smile $p_2 = 0$	\frown $p_3 = 0.43$	\smile

$$p_1 = f(-\sqrt{3}) = -0.43, \text{ točka pregiba je } (-\sqrt{3}, -0.43)$$

$$p_2 = f(0) = 0, \text{ točka pregiba je } (0, 0)$$

$$p_3 = f(\sqrt{3}) = 0.43, \text{ točka pregiba je } (\sqrt{3}, 0.43)$$

IV - Asimptote a) Horizontalne asimptote: U prvom koraku smo imali da kad $x \rightarrow \pm\infty, f(x) \rightarrow 0$. Zato je pravac $y = 0$ (x -osa) horizontalna asimptota ove funkcije

b) Vertikalne asimptote: Funkcija nema točkaka prekida pa nema ni vertikalnih asimptota

c) Kose asimptote: Za koeficijent k kose asimptote imamo

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{x}{x(x^2 + 1)} = 0$$

pa funkcija nema kosih asimptota

V - Graf funkcije

