RJEŠENJE: 4.7. Zadatak 3.2)

I - Istarživanje funkcije: – Područje definicije: svaki $x^2-4 \neq 0, x_{1,2} = \pm 2$.

Pod.def. $x \in \mathbb{R} \backslash \{-2, 2\}$

– Limesi na rubovima područja definicije

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-4} &= 1, \ \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1 \\
\lim_{x\to-2^-} \frac{x^2}{x^2-4} &= +\infty, \ \lim_{x\to-2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = -\infty \\
\lim_{x\to2^-} \frac{x^2}{x^2-4} &= -\infty, \ \lim_{x\to2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = +\infty
\end{aligned}$$

– Funkcija je parna i nije periodična.

– Nultočke: razlomljena funkcija ima vrijednost nula u nulama brojnika, zato je

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0, x_{1,2} = 0 (\text{dvostruka nula})$$

II - istraživanje funkcije $f'(x)$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-8x}{(x^2-4)^2} \\
f'(x) &= 0 \Rightarrow -8x = 0 \Rightarrow x = 0. \text{ S.T.}
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
predznak f'		$+$		$+$		$-$		$-$	
tijek f-je f		$\nearrow$		$\nearrow$	M	$\searrow$		$\searrow$	

$$M = f(0) = 0, \ \text{maksimum} \ (0,0)$$

III - istraživanje funkcije $f''(x)$

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}, 8\left(3x^2+4\right) = 0$$

Zagrada je uvijek pozitivna: **funkcija nema točaka pregiba**.

IV - Asimptote a) Horizontalne asimptote: U prvom koraku smo imali da kad $x \to \pm\infty, f(x) \to 1$. Zato je pravac $y = 1$ horizontalna asimptota ove funkcije. Uoči da su ti količnici uvijek pozitivni brojevi što za graf funkcije znači da se s gornje strane približava svojoj asimptoti $y = 1$.

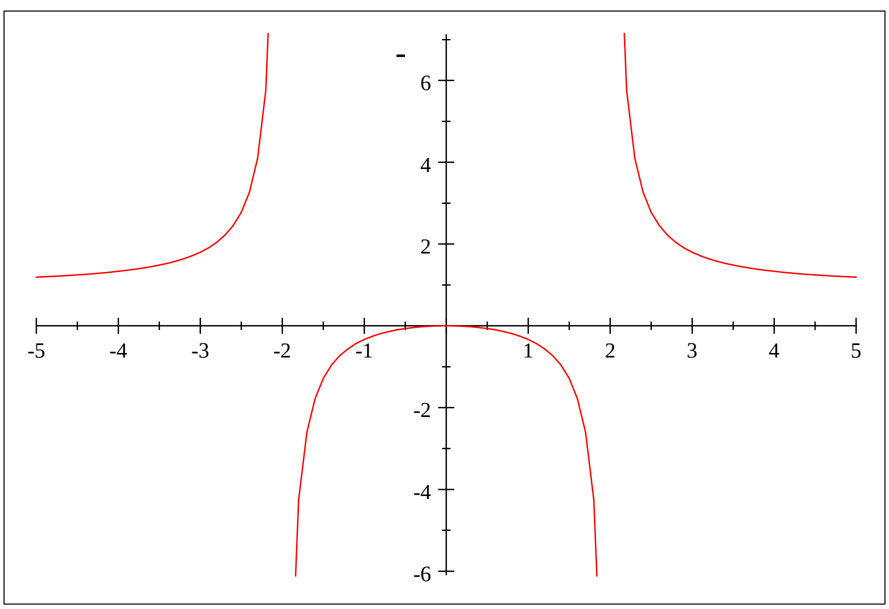
b) Vertikalne asimptote: Razlomljena funcija u točkama prekida ima vertikalne asimptote, stoga su pravci $x = -2$ *i* $x = 2$ vertikalne asimptote ove funkcija

c) Kose asimptote: Za koeficijent k kose asimptote imamo

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2-4}}{x} = \frac{x^2}{x(x^2-4)} = 0$$

pa funkcija nema kosih asimptota

V - Graf funkcije



Ucrtajte sami horizontalne i vertikalne asimptote.