
Pravac - priprema(kontrolni rad)

- Odjel: III - c ekonomski tehničari -

Zadatak 1.- Opseg trokuta

Zadatak 1 *Izračunaj opseg trokuta ako su mu vrhovi točke:*

- 1) $A(1, 4), B(3, 3), C(-5, 3)$
- 2) $A(1, 0), B(-3, -3), C(9, -8)$
- 3) $A(1, 4), B(3, 3), C(-5, 3)$
- 4) $A(1, -1), B(3, 2) \text{ i } C(-2, 3)$

Primjer Izračunaj opseg rokuta ako su mu vrhovi u točkama $A(1, -1)$, $B(3, 2)$ i $C(-2, 3)$.

$$\text{formula : } |T_1T_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(3 - 1)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} |AC| &= \sqrt{(-5 - 1)^2 + (3 - 4)^2} = \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{37} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |BC| &= \sqrt{(-5 - 3)^2 + (3 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-8)^2 + 0} = \sqrt{64} = 8 \end{aligned}$$

$$O = |AB| + |AC| + |BC| = \sqrt{5} + \sqrt{37} + 8$$

Zadatak 2.- Oblici jednadžbe pravca

Zadatak 2 *Jednadžbu pravca datu u jedno obliku prevedi u ostala dva:*

1) $5x - y + 3 = 0$ u eksplicitni i segmentni

2) $2x + 3y - 6 = 0$ u eksplicitni i segmentni

3) $y = -\frac{2}{3}x + 2$ u opći i segmentni

4) $y = 2x - 4$ u opći i segmentni

5) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ u opći i eksplicitni

6) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ u opći i eksplicitni

♣ Jednadžba pravca kroz dvije točke ♣

Ako su $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ dvije točke nekog pravca tada je jednadžba tog pravca data sa

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Zadatak 3. - Jednadžba pravca kroz dvije i jednu točku

Zadatak 3 *Odredi jednadžbe pravaca koji sadrže stranice trokuta :*

- 1) $A(1, 4), B(3, 3), C(-5, 3)$
- 2) $A(1, 0), B(-3, -3), C(9, -8)$
- 3) $A(-2, 1), B(-1, -1), C(1, 2)$
- 4) $A(-1, -1), B(1, 2), C(1, 9)$

Primjer *Odredi jednadžbe pravaca koji sadrže stranice trokuta $A(1, 4), B(3, 3), C(-5, 3)$:. Tri puta ćemo primjeniti gornju formulu*

$$\begin{aligned}
 p(A, B) \quad y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \\
 y - 4 &= \frac{3 - 4}{3 - 1} (x - 1) \\
 y &= \frac{-1}{2} (x - 1) + 4 \\
 y &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 4 \\
 y &= -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p(B, C) \quad y - 3 &= \frac{3 - 3}{-5 - 3} (x - 3) \\
 y - 3 &= \frac{0}{-8} (x - 3) \\
 y - 3 &= 0 \cdot (x - 3) \\
 y &= 3
 \end{aligned}$$

$$p(A, C) \quad y - 4 = \frac{3 - 4}{-5 - 1} (x - 1)$$

$$y = \frac{-1}{-6} (x - 1) + 4$$

$$y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} + 4$$

$$y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} + 4$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{23}{6}$$

Zadatak 4. - Kut između dva pravca

Zadatak 4 *Odredi kut između pravaca:*

1) $3x + 4y - 25 = 0$
 $4x + 3y - 25 = 0$

2) $5x - y - 8 = 0$
 $3x + 2y + 2 = 0$

3) $2x - 3y + 11 = 0$
 $3x - y + 5 = 0$

4) $-3x - 2y + 4 = 0$
 $3x - 4y - 8 = 0$

Primjer Označimo s φ kut između ovih pravaca:

$$-3x - 2y + 4 = 0$$

$$2y = -3x + 4$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$

$$k_1 = -\frac{3}{2}$$

$$3x - 4y - 8 = 0$$

$$4y = 3x - 8$$

$$y = \frac{3}{4}x - 2$$

$$k_2 = \frac{3}{4}$$

$$\tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$
$$\tan \varphi = \left| \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} \right| = \left| \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{9}{8}} \right|$$

$$\tan \varphi = \left| \frac{\frac{9}{4}}{-\frac{1}{8}} \right| = |-18| = 18$$

$$\varphi = \arctan 18 = 86^\circ 49' 13''$$

♣ uvjet paralelnosti dva pravca ♣

Paralelni pravci $p_1 \dots y = k_1x + l_1$ i $p_2 \dots y = k_2x + l_2$ imaju jednake koeficijente smjerova, tj. vrijedi

$$k_1 = k_2.$$

Zadatak 5. - Uvjet paralelnosti i okomitosti

Zadatak 5 *Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom $M(-4, 1)$ i paralelan je pravcu $p \dots 2x - y + 3 = 0$.*

Rješenje *Pravac koji tražimo neka je q . Odredimo koeficijent smjera pravca p tako što ćemo ga prevesti u eksplicitni oblik:*

$$y = 2x + 3 \Rightarrow k_p = 2$$

Koeficijent smjera pravca q jednak je $k_q (= k_p) = 2$ jer su paralelni i točka $M(-4, 1)$ je točka tog pravca. Iz jednadžbe pravca kroz jednu točku imamo

$$y - y_M = k_q (x - x_M)$$

$$y - 1 = 2 \cdot (x + 4)$$

$$y = 2x + 8 - 1$$

$$y = 2x + 7 \quad : \text{eksplicitni oblik ili}$$

$$q \dots 2x - y + 7 = 0 \quad \text{opći oblik}$$

Zadatak 6 *Identičan postupak i identičan tekst i za ostale zadatke.*

- 1) $M(-4, 1), p \dots 2x - y + 3 = 0$
- 2) $M(2, -3), p \dots 2x + 3y - 2 = 0$
- 3) $M(-2, -3), p \dots 3x - y + 5 = 0$
- 4) $M(1, -2), p \dots 5x - y + 3 = 0$

♣ uvjet okomitosti dva pravca ♣

Za koeficijente smjerova **okomitih pravca**
 $p_1 \dots y = k_1 x + l_1$ i $p_2 \dots y = k_2 x + l_2$ vrijedi
 $k_1 \cdot k_2 = -1$ tj. vrijedi

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \text{ kao i } k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

Zadatak 7 *Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom $N(3, 1)$ i normalan je na pravcu $p \dots 2x - 3y + 1 = 0$.*

Rješenje *Pravac koji tražimo neka je q . Odredimo koeficijent smjera pravca p tako što ćemo ga prevesti u eksplicitni oblik:*

$$\begin{aligned} 3y &= 2x + 1 \quad / : 3 \\ y &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow k_p = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Koeficijent smjera pravca q jednak je

$$k_q = -\frac{1}{k_p} = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

Za pravac q znamo sada koeficijent smjera i jednu točku $N(-2, 2)$ pa iz jednadžbe pravca kroz jednu točku imamo

$$y - y_N = k_q (x - x_N)$$

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 2)$$

$$y = -\frac{3}{2}x - 3 + 2$$

$$y = -\frac{3}{2}x - 1 \quad : \text{eksplicitni oblik ili}$$

$$q \dots 3x + 2y + 2 = 0 \quad \text{opći oblik}$$

Zadatak 8 Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom N i normalan je na pravcu p

- 1) $N(3, 1), p \dots x - y + 1 = 0$
- 2) $N(-2, 2), p \dots 2x - 3y + 1 = 0$
- 3) $N(2, -3), p \dots 3x - y + 5 = 0$
- 4) $N(-1, -2), p \dots 5x - y + 3 = 0$