M8 TEST - rješenje
– MATEMATIKA –

IV - c : grupa B

Ime i prezime:

Zadatak 1 *Odredi sve nenulte derivacije funkcije*

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x - 11$$

Rješenje 1 *Sve derivacije funkcije*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 5 \\ f''(x) &= 12x - 6 \\ f'''(x) &= 12 \\ f^{(IV)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Zadatak 2 *Odredi prvu derivaciju funkcije*

$$f(x) = f(x) = \left(x^2 - 1\right)(5 - 2x)$$

Rješenje 2 *Prva derivacija je*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(5 - x) + \left(x^2 - 1\right)(-2) \\ &= 10x - 4x^2 - 2x^2 + 2 \\ &= -6x^2 + 10x + 2 \end{aligned}$$

Zadatak 3 *Odredi prvu derivaciju funkcije*

$$f(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

Rješenje 3 *Prva derivacija je*

$$f'(x) = \frac{x - 2 - (x+3)}{(x-2)^2} = -\frac{5}{(x-2)^2}$$

Zadatak 4 *Odredi prvu derivaciju funkcije*

$$f\left(x\right)=\left(x^2+1\right)^2$$

Rješenje 4 *Prva derivacija je*

$$f'\left(x\right)=2\left(x^2+1\right)\cdot 2x=4x\left(x^2+1\right)$$

Zadatak 5 *Kako glasi jednadžba tangente i normale položenih na graf funkcije u točki s apscisom* $x_0=-1$*:*

$$f\left(x\right)=x^2-2x-3$$

Rješenje 5 *Kao prvo odrediti ordinatu točke na funkciji*

$$y_0=f\left(x_0\right)=f\left(2\right)=1+2-3=-3, T\left(-1,0\right)$$

Prva derivacija funkcije je $f'\left(x\right)=2x-2$
U točki $x_0=-1$*, vrijednost prve derivacije je* $f'\left(x_0\right)=f'\left(-1\right)=-4$
Koeficijenti smjera tangente i normale su $k_t=-4, k_n=\frac{1}{4}$,
Konačno su tražene jednadžbe

$$\begin{aligned} t\cdots y &= -4\left(x+1\right), t\cdots 4x-y+4=0 \\ n\cdots y &= \frac{1}{4}\left(x+1\right), n\cdots 4x-y+1=0 \end{aligned}$$

Zadatak 6 *Izračunaj vrijednost limsa*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+3x-x^2}{(2x-1)(x+3)}$$

Rješenje 6 *Limes je*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+3x-2x^2}{(x-1)(x+1)}=-2$$

Zadatak 7 *Odrediti područje definicije, nultočke i limese na rubovima područja definicije funkcije*

$$f(x)=x^3-3x^2+4$$

Rješenje 7 *Područje definicje je cijeli skup R (za svaki x iz R može se odrediti vrojednost f (x) ..)*

Limesi: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x^2+4)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-3x^2+4)=\infty$

Nuk točke: $(x^2-4x+4)(x+1)=(x-2)^2(x+1)=0$, Rješenja su $x_1=-1, x_2=2$

Zadatak 8 *Odrediti intervale rasta, pada i ekstreme funkcije*

$$f(x)=x^3-3x^2+4$$

Rješenje 8 *Navedeno ćemo napraviti uz pomoć prve derivacije*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-6x \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow 3x^2-6x=3x(x-2)=0,\ \textit{pa su vrijednosti} \\ x_1 &= 0\ \ i\ \ x_2=2\ \textit{STACIONARNE TOČKE.} \end{aligned}$$

One dijele područje definicije na intervale monotonosti

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
predznak f'		$+$		$-$		$+$	
tijek f-je f		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Odredimo vrijednosti tih ekstrema

$$\max=f(0)=4,\min=f(2)=0$$

Zadatak 9 *Odrediti intervale konveksnosti, odnosno konkavnosti, i točke pregiba funkcije*

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

Rješenje 9 *Navedeno ćemo napraviti uz pomoć druge derivacije*

$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0$, *rješenje ove jednadžbe je*

$x = 1$

Tablica sada izgleda ovako

x	$-\infty$		1		$+\infty$
predznak f''		$-$		$+$	
f-ja f		$\frown$	p	$\smile$	

Funkcija ima točku pregiba za $x = 1$

i vrijednost funkcije u toj točki je

$f(1) = 2$

Zadatak 10 *Prema ranije provedenim koracima nacrtati graf funkcije*

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

Rješenje 10 *Graf funkcije je*