M8 TEST - rješenje
– MATEMATIKA –

IV - c : grupa A

Ime i prezime:

Zadatak 1 *Odredi sve nenulte derivacije funkcije*

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

Rješenje 1 *Sve derivacije funkcije*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9x^2 - 4x + 3 \\ f''(x) &= 18x - 4 \\ f'''(x) &= 18 \\ f^{(IV)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Zadatak 2 *Odredi prvu derivaciju funkcije*

$$f(x) = (3 - 4x)\left(x^2 - 3x + 1\right)$$

Rješenje 2 *Prva derivacija je*

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4\left(x^2 - 3x + 1\right) + (3 - 4x)(2x - 3) \\ &= -4x^2 + 12x - 4 - 8x^2 + 18x - 9 \\ &= -12x^2 + 30x - 13 \end{aligned}$$

Zadatak 3 *Odredi prvu derivaciju funkcije*

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

Rješenje 3 *Prva derivacija je*

$$f'(x) = \frac{x - 3 - (x + 2)}{(x-3)^2} = -\frac{5}{(x-3)^2}$$

Zadatak 4 *Odredi prvu derivaciju funkcije*

$$f(x) = (2x-1)^3$$

Rješenje 4 *Prva derivacija je*

$$f'(x) = 3(2x-1)^2 \cdot 2 = 6(2x-1)^2$$

Zadatak 5 *Kako glasi jednadžba tangente i normale položenih na graf funkcije u točki s apscisom $x_0 = 2$:*

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Rješenje 5 *Kao prvo odrediti ordinatu točke na funkciji*

$$y_0 = f(x_0) = f(2) = 4 - 4 - 3 = -3, T(2, -3)$$

Prva derivacija funkcije je $f'(x) = 2x - 2$
U točki $x_0 = 2$, vrijednost prve derivacije je $f'(x_0) = f'(2) = 2$
Koeficijenti smjera tangente i normale su $k_t = 2, k_n = -\frac{1}{2}$,
Konačno su tražene jednadžbe

$$\begin{aligned} t \cdots y + 3 &= 2(x-2), t \cdots 2x - y - 7 = 0 \\ n \cdots y + 3 &= -\frac{1}{2}(x-2), n \cdots x + 2y + 4 = 0 \end{aligned}$$

Zadatak 6 *Izračunaj vrijednost limsa*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+3x-x^2}{(2x-1)(x+3)}$$

Rješenje 6 *Limes je*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+3x-x^2}{(2x-1)(x+3)}=-\frac{1}{2}$$

Zadatak 7 *Odrediti područje definicije, nultočke i limese na rubovima područja definicije funkcije*

$$f(x)=\left(x^2+x\right)(x-2)$$

Rješenje 7 *Područje definicje je cijeli skup R (za svaki x iz R može se odrediti vrojednost $f(x)$ ..)*

Limesi: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(x^2+x\right)(x-2)\right]=-\infty$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^2+x\right)(x-2)\right]=\infty$
Nuk točke: $\left(x^2+x\right)(x-2)=x(x+1)(x-2)=0$, Rješenja su $x_1=-1, x_2=0, x_3=2$

Zadatak 8 *Odrediti intervale rasta, pada i ekstreme funkcije*

$$f(x)=\left(x^2+x\right)(x-2)$$

Rješenje 8 *Navedeno ćemo napraviti uz pomoć prve derivacije*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2x+1)(x-2)+\left(x^2+x\right)\\
&= 3x^2-2x-2\\
f'(x) &= 0\Rightarrow 3x^2-2x-2=0,\ \textit{pa su vrijednosti}\\
x_1 &= \frac{1-\sqrt{7}}{3}\quad i\quad x_2=\frac{1+\sqrt{7}}{3}\ \textit{STACIONARNE TOČKE.}
\end{aligned}$$

One dijele područje definicije na intervale monotonosti

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{7}}{3}$		$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$		$+\infty$
predznak f'	$+$		$-$		$+$	
tijek f-je f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Odredimo vrijednosti tih ekstrema

$$\max = f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) \approx 0,632, \min = f\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right) \approx -2,11$$

Zadatak 9 *Odrediti intervale konveksnosti, odnosno konkavnosti, i točke pregiba funkcije*

$$f(x) = \left(x^2 + x\right)(x-2)$$

Rješenje 9 *Navedeno ćemo napraviti uz pomoć druge derivacije*

$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 2x - 2)' = 6x - 2$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 2 = 0$, *rješenje ove jednadžbe je*

$x = \frac{1}{3}$

Tablica sada izgleda ovako

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
predznak f''	$-$		$+$
f-ja f	$\frown$	p	$\smile$

Funkcija ima točku pregiba za $x = \frac{1}{3}$

i vrijednost funkcije u toj točki je

$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{20}{27}$

Zadatak 10 *Prema ranije provedenim koracima nacrtati graf funkcije*

$$f(x) = \left(x^2 + x\right)(x - 2)$$

Rješenje 10 *Graf funkcije je*